Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 2 *- Prof. D. Pasetto*

Tema A - 24/06/2022
Tempo a disposizione: 2h 30min

Cognome .... Nome .... Matricola .... Aula-Posto ....

Norme generali:

- Non girare il foglio fino all'inizio dell'esame.
- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame.
- NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare. Per Calcolo 2 è permesso utilizzare un formulario su un foglio A4.
- Durante la prova sarà necessario rimanere al proprio posto, indossando sempre la mascherina. Non sarà possibile uscire durante la prova.
- Al termine della prova, i docenti passeranno fila per fila per raccogliere gli scritti. Solo al termine delle operazioni di consegna, si potrà abbandonare l'aula, una fila alla volta per evitare assembramenti, rispettando le indicazioni dei docenti.
- Siate ordinati nella risoluzione degli esercizi e scrivete cognome e nome su ogni foglio.

Ulteriori indicazioni per chi fa l'esame in via telematica:

- La telecamera deve inquadrare sia il vostro volto che le vostre mani.
- Alla fine dell'esame fotografare SOLO i fogli di bella facendo attenzione di mettere a fuoco. Raccogliere le foto ordinate in un unico file pdf e caricarlo su moodle col nome: "CognomeNome.pdf".
- La sezione moodle per l'upload del compito rimarrà attiva fino a pochi minuti dopo la fine dell'esame. Se non è stato possibile caricare il compito in tempo bisogna contattare il docente e sarà richiesto di fare l'orale.
- Se avrete dei problemi di connessione, siete comunque invitati a caricare il vostro elaborato nella sezione di moodle. Vi sarà poi richiesto di sostenere l'orale.
- Potete lasciare la teleconferenza solo quando gli assistenti vi confermeranno l'avvenuta consegna in moodle.

Problema 1 (7 punti)

1.1 Calcolare l'integrale generale di $3y'' - y = -2y' + 2e^{\frac{x}{3}} - x^2$.

1.2 Trovare la soluzione del problema di Cauchy con $y(0) = 10$ e $y'(0) = -\frac{17}{2}$. Determinarne il dominio e verificare che la soluzione sia di classe $\mathcal{C}^2$.

Problema 2 (8 punti)

Considerare la curva γ descritta dalla parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ definita per parti

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t) = \left(\frac{1}{2}\sin(\pi|t|), \frac{t}{2} \right), & \text{se } t \in [-1\ ,1\ ]\,; \\ \mathbf{r}_2(t) = \left((2t-3)^2 - 1, -t + \frac{3}{2} \right) & \text{se } t \in\ ]1\ ,2] \end{cases}$$

2.1 Determinare se γ è continua, chiusa, semplice e regolare.

2.2 Scrivere le equazioni del supporto della curva. Disegnare il supporto e indicarne il verso di percorrenza.

2.3 Scrivere l'equazione cartesiana e parametrica della retta tangente a γ in $t_0 = -\frac{1}{2}$.

2.4 Sia $f(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{-\pi^2 x^2 + \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{4}}}$.

Verificare che il sostegno di $\mathbf{r}_1$ è contenuto nel dominio di f e calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\mathbf{r}_1} f$.

Problema 3 (9 punti)

Sia $\quad f(x, y) = \sqrt{-x^2 + 4x - 4y^2}$.

3.1 Determinare il dominio di f, disegnarlo, e dire se la funzione è di classe $\mathcal{C}^2$. Disegnare, se possibile, il grafico delle sezioni $y = 0$ e $x = 4$.

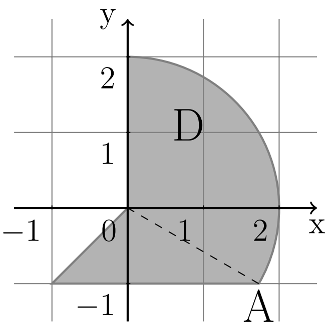
3.2 Determinare l'esistenza di eventuali punti critici di f e stabilire se tali punti sono di massimo o minimo relativo o di sella.

3.3 Determinare il versore di massima crescita nel punto $(1, 0)$ e scrivere lo sviluppo di Taylor del primo ordine rispetto a tale punto.

Problema 4 (6 punti)

Sia D il dominio rappresentato in figura dove la curva alla frontiera è un arco di circonferenza di centro $(0, 0)$. Il vertice A ha coordinate $A = (\sqrt{3}, -1)$.
Utilizzare gli integrali doppi per calcolare:

$$I_1 = \int\int_D dx\, dy \quad ; \quad I_2 = \int\int_D xy\, dx\, dy$$



Soluzioni

Problema 1 (7 punti)

1.1 Calcolare l'integrale generale di $3y'' - y = -2y' + 2e^{\frac{x}{3}} - x^2$.

L'eq. caratteristica dell'eq. omogenea associata è $3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$ che ha soluzioni $\lambda = -1$ e $\lambda = +\frac{1}{3}$. Quindi le soluzioni dell'omogenea associata sono

$$z(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{1}{3}x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Per trovare la soluzione particolare si usa il metodo di somiglianza, notando che $e^{\frac{x}{3}}$ è soluzione dell'omogenea associata

$$\bar{y}(x) = Ax^2 + Bx + C + Dxe^{\frac{x}{3}}, \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$$

Le derivate sono:

$$\bar{y}'(x) = 2Ax + B + De^{\frac{x}{3}} + \frac{D}{3}xe^{\frac{x}{3}};$$

$$\bar{y}''(x) = 2A + \frac{D}{3}e^{\frac{x}{3}} + \frac{D}{3}e^{\frac{x}{3}} + \frac{D}{9}xe^{\frac{x}{3}};$$

Sostituendo si ottiene

$$6A + De^{\frac{x}{3}}(2 + \frac{1}{3}x) + 4Ax + 2B + 2De^{\frac{x}{3}}(1 + \frac{1}{3}x) - Ax^2 - Bx - C - Dxe^{\frac{x}{3}} = 2e^{\frac{x}{3}} - x^2$$

e quindi, confrontando con il membro di sinistra con il membro di destra, si ha il sistema

$$\begin{cases} 6A + 2B - C = 0 \\ 4A - B = 0 \\ -A = -1 \\ 4D = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} C = 14 \\ B = 4 \\ A = 1 \\ D = \frac{1}{2} \end{cases}$$

L'integrale generale quindi è:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{1}{3}x} + \frac{1}{2}xe^{x/3} + x^2 + 4x + 14, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

1.2 Trovare la soluzione del problema di Cauchy con $y(0) = 10$ e $y'(0) = -\frac{17}{2}$. Determinarne il dominio e verificare che la soluzione sia di classe $\mathcal{C}^2$.

La derivata di una soluzione vale

$$y'(x) = -C_1 e^{-x} + \frac{1}{3}C_2 e^{\frac{1}{3}x} + \frac{1}{2}e^{x/3} + \frac{1}{6}xe^{x/3} + 2x + 4$$

Imponendo le condizioni iniziali si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 14 = 10 \\ -C_1 + \frac{1}{3}C_2 + \frac{1}{2} + 4 = -\frac{17}{2} \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 = -4 - C_2 \\ -3C_1 + C_2 = -39 \end{cases}$$

$$\implies C_1 = \frac{35}{4}, C_2 = -\frac{51}{4}$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = \frac{35}{4}\mathrm{e}^{-x} - \frac{51}{4}\mathrm{e}^{\frac{1}{3}x} + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{x/3} + x^2 + 4x + 14$$

Il dominio è $\mathbb{R}$ e la soluzione è $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ in quanto somma di funzioni $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Problema 2 (8 punti)

Considerare la curva γ descritta dalla parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ definita per parti

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t) = \left(\frac{1}{2}\sin(\pi|t|), \frac{t}{2} \right), & \text{se } t \in [-1\ ,1\ ]\,; \\ \mathbf{r}_2(t) = \left((2t-3)^2 - 1, -t + \frac{3}{2}\right) & \text{se } t \in]1\ ,2] \end{cases}$$

2.1 Determinare se γ è continua, chiusa, semplice e regolare.

Continuità, chiusura, semplicità e regolità si possono dedurre dal grafico del supporto.

$\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ sono continue. Inoltre

$$\mathbf{r}_1(1) = (0, 1/2) = \mathbf{r}_2(1)$$

quindi anche γ è continua.

Si ha $\mathbf{r}(-1) = \mathbf{r}_1(-1) = (0, -1/2)$ e $\mathbf{r}(2) = \mathbf{r}_2(2) = (0, -1/2)$, quindi γ è chiusa.

Per la semplicità, dalla seconda componente di $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ si capisce che questi due archi di curva sono semplici. Inoltre dal grafico del supporto si vede che la componente x di $\mathbf{r}_1$ è sempre maggiore o uguale a zero, mentre la componente x di $\mathbf{r}_2$ è sempre minore o uguale a zero. Gli unici punti di intersezione corrispondono con $t = 1$ e il punto di chiusura. Quindi la parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ è semplice.

Per la regolarità bisogna calcolare il vettore tangente a $\mathbf{r}_1$,

$$\mathbf{r}_1'(t) = \begin{cases} (-\frac{\pi}{2}\cos(\pi t), \frac{1}{2}), & \text{per } t \in [-1, 0[\\ (\frac{\pi}{2}\cos(\pi t), \frac{1}{2}), & \text{per } t \in]0, 1] \end{cases} \qquad (0, 2)$$

e a $\mathbf{r}_2$,

$$\mathbf{r}_2'(t) = (4t - 12, -1)$$

$\mathbf{r}_1$ non è derivabile per $t = 0$, ed è regolare per tutti gli altri valori di t, in quanto la seconda componente non si annulla mai. Analogamente per $\mathbf{r}_2$. Inoltre $\mathbf{r}_1'(1) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2})$ e $\mathbf{r}_2'(1) = (-8, -1)$. Quindi la parametrizzazione è regolare a tratti, negli intervalli $]-1, 0[$, $]0, 1[$ e $]1, 2[$

2.2 Scrivere le equazioni del supporto della curva. Disegnare il supporto e indicarne il verso di percorrenza.

Il supporto di $\mathbf{r}_1$ è il grafico della funzione

$$x = \frac{1}{2}\sin(2\pi|y|), \quad y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

. Il supporto della curva $\mathbf{r}_2$ è il grafico della funzione

$$x = 4y^2 - 1, \quad y \in] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$$

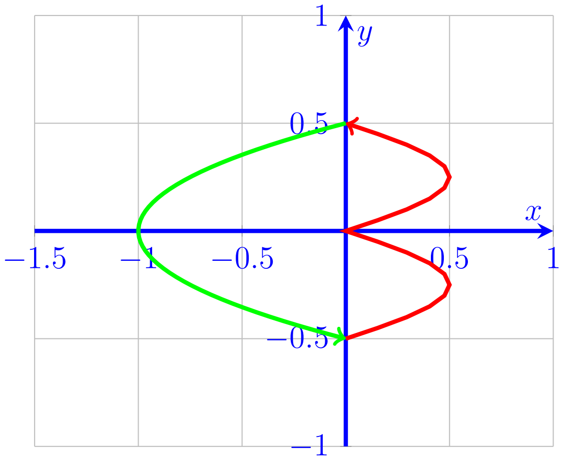


Figura 1: Supporto della curva parametrica ($\mathbf{r}_1$ in rosso e $\mathbf{r}_2$ in verde).

2.3 Scrivere l'equazione cartesiana e parametrica della retta tangente a γ in $t_0 = -\frac{1}{2}$.

Si ha $\mathbf{r}(-1/2) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$ e $\mathbf{r}'(-1/2) = (0, \frac{1}{2})$. Quindi un'eq. parametrica della retta tangente è:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \\ y(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}) \end{cases}$$

L'equazione cartesiana è $x = \frac{1}{2}$.

2.4 Sia $f(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{-\pi^2 x^2 + \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{4}}}$.

Verificare che il sostegno di $\mathbf{r}_1$ è contenuto nel dominio di f e calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\mathbf{r}_1} f$.

Il dominio di $f(x, y)$ è

Integrale:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{r}_1} f(x,y)\,d\mathbf{s} &= \int_{-1}^{0} f(-\frac{1}{2}\sin(\pi t), t/2)\|\mathbf{r}_1'\|\,dt + \int_0^1 f(\frac{1}{2}\sin(\pi t), t/2)\|\mathbf{r}_1'\|\,dt\\ &= \int_{-1}^{1} \frac{t/2}{\sqrt{-\frac{\pi^2}{4}\sin^2(\pi t)+\frac{\pi^2}{4}+\frac{1}{4}}}\sqrt{\frac{\pi^2}{4}\cos^2(\pi t)+\frac{1}{4}}\,dt =\\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\frac{\sqrt{\frac{\pi^2}{4}\cos^2(\pi t)+\frac{1}{4}}}{\sqrt{\frac{\pi^2}{4}\cos^2(\pi t)+\frac{1}{4}}}\,dt =\\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t\,dt = \frac{1}{2}[\frac{t^2}{2}]_{-1}^{1} = 0\end{aligned}$$

Problema 3 (9 punti)

Sia $\quad f(x,y) = \sqrt{-x^2+4x-4y^2}$.

3.1 Determinare il dominio di f, disegnarlo, e dire se la funzione è di classe $\mathcal{C}^2$. Disegnare, se possibile, il grafico delle sezioni $y=0$ e $x=4$. Per il dominio dobbiamo imporre

$$-x^2+4x-4y^2>0$$

Raccogliendo il primo quadrato si ottiene:

$$4-(x-2)^2-4y^2 \geq 0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{(x-2)^2}{4}+y^2 \geq 1$$

Il dominio di f è $D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{(x-2)^2}{4}+y^2 \geq 1\}$ che rappresenta la porzione di piano contenuta all'interno dell'ellisse di centro $(2,0)$ e semiassi 2, 1.

La funzione è $\mathcal{C}^2$ nella parte interna del dominio perché la radice non è derivabile quando l'argomento è nullo.

Vedere la figura per la sezione $y=0$. La sezione $x=4$ contiene solo il punto $y=0$, $z=0$.

3.2 Determinare l'esistenza di eventuali punti critici di f e stabilire se tali punti sono di massimo o minimo relativo o di sella.

Il gradiente di f è:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{x-2}{\sqrt{-x^2+4x-4y^2}} \\ -\dfrac{4y}{\sqrt{-x^2+4x-4y^2}} \end{pmatrix}$$

Imponendo $\nabla f(x,y)=(0,0)$ si ottiene il punto critico $P=(2,0)$ che è all'interno del dominio

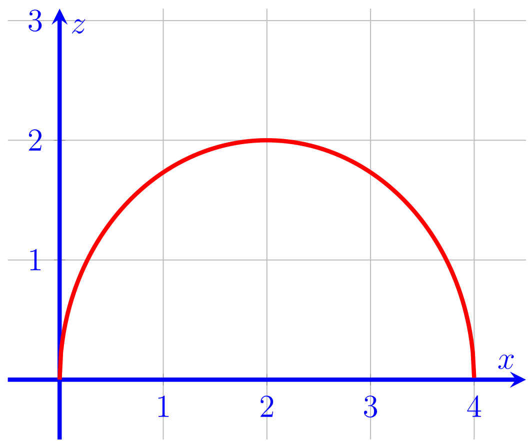


Figura 2: Sezione $y = 0$, $z = \sqrt{4 - x^2}$

Si usa il test della matrice Hessiana per caratterizzare tale punto. In un punto (x, y) la matrice Hessiana H_f è:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{-Q + (x-2)(-(x-2)/Q)}{Q^2} & -\dfrac{(x-2)(4y/Q)}{Q^2} \\ -\dfrac{(x-2(4y/Q)}{Q^2} & \dfrac{-4Q + 4y(-4y/Q)}{Q^2} \end{pmatrix}$$

dove si è posto $Q(x, y) = \sqrt{-x^2 + 4x - 4y^2}$.

- P_1:

$$H_f(2,0) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

det $(H_f(0, 2)) = 1 > 0$ e il primo termine è < 0. Quindi H_f è definita negativa in P_1 e P_1 è punto di massimo locale.

3.3 Determinare il versore di massima crescita nel punto $(1, 0)$ e scrivere lo sviluppo di Taylor del primo ordine rispetto a tale punto.

$$\nabla f(1,0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \|\nabla f(1,0)\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

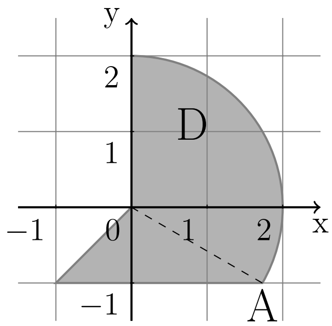
Quindi il versore di massima crescita in $(1, 0)$ è:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo sviluppo di Taylor del primo ordine in $(1, 0)$ è

$$T_1(x,y) = \sqrt{3} + 1\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$$

Problema 4 (6 punti)



Sia D il dominio rappresentato in figura dove la curva alla frontiera è un arco di circonferenza di centro $(0,0)$. Il vertice A ha coordinate $A = (\sqrt{3}, -1)$.
Utilizzare gli integrali doppi per calcolare:

$$I_1 = \int\int_D dx\,dy \quad ; \quad I_2 = \int\int_D xy\,dx\,dy$$

Il dominio D si può pensare come $D = D_1 \cup D_2$ con:

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \rho\cos(\theta), y = \rho\sin(\theta),\ -\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 2\}$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 0, y \leq x \leq -\sqrt{3}y\}$$

Quindi $\int\int_D dx\,dy = \int\int_{D_1} dx\,dy + \int\int_{D_2} dx\,dy$.

$$\int\int_{D_1} dx\,dy = \int_{-\pi/6}^{\pi/2} \left(\int_0^2 \rho\,d\rho\right) d\theta = \frac{2}{3}\pi \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^2 = \frac{4}{3}\pi$$

$$\int\int_{D_2} dx\,dy = \int_{-1}^{0} \left(\int_y^{-\sqrt{3}y} 1\,dx\right) dy = \int_{-\sqrt{-1}}^{0} -\sqrt{3}y - y\,dy = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}[y^2]_{-1}^0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

Quindi l'area di D vale $\frac{-1-\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{3}\pi$
Per il secondo integrale:

$$\begin{aligned}
\int\int_{D_1} xy\,dx\,dy &= \int_{-\pi/6}^{\pi/2} \left(\int_0^2 \rho^3 \sin(\theta)\cos(\theta)\,d\rho\right) d\theta = \\
&= \left(\int_{-\pi/6}^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin(2\theta)\,d\theta\right)\left(\int_0^2 \rho^3\,d\rho\right) \\
&= \left[-\frac{\cos(2\theta)}{4}\right]_{-\pi/6}^{\pi/2} [\rho^4/4]_0^2 = (\frac{1}{4} + \frac{1}{8})4 = 3/2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int\int_{D_2} xy\,dx\,dy &= \int_{-1}^{0} \left(\int_y^{-\sqrt{3}y} xy\,dx\right) dy = \\
&= \int_{-1}^{0} y\,[x^2/2]_y^{-\sqrt{3}y}\,dx = \\
&= \int_{-1}^{0} \frac{3-1}{2} y^3\,dx = \\
&= [\frac{y^4}{4}]_{-1}^0 = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Quindi I_2 vale $5/4$